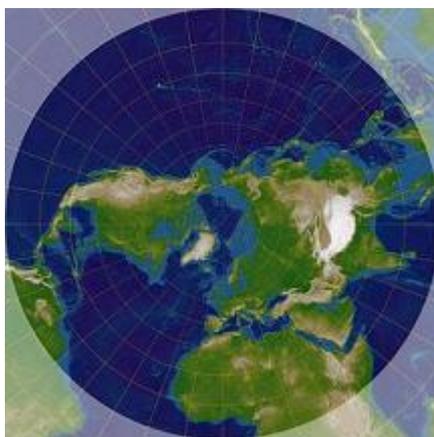


# La proyección estereografica

Geometria Projectiva - Claudia Totzeck

## Introducción

La proyección estereografica es una aplicación especial de las proyecciones centricas que reproduce la superficie de una bola en un plano. Por ejemplo la aplicación entre la bola de Riemann y el plano de los numeros complejos. Por eso una posibilidad de empleo es evidente: la creación de mapas. Aquí una imagen de la proyección esereografica del hemisferio norte:



En general se coge por el centro de la proyección el polo norte o sur. El plano de la proyección está ortogonal a la recta que une el centro de la proyección y el centro de la bola. Frequentemente se usa un plano tangencial o el plano ecuatorial para la proyección. Pero la elección del plano no influencia las propiedades de la proyección estereografica, solamente las figuras de la proyección se ponen en otro tamaño.

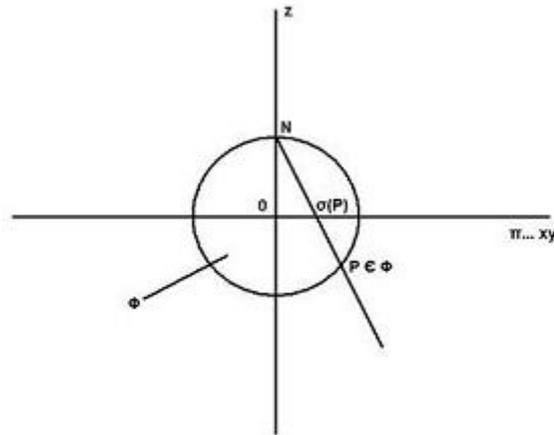
Hay definiciones diferentes por la proyección estereografica, depende del centro que eliges. Una es esta:

Sea  $\Phi$  la esfera con radio 1 y centro  $(0, 0, 0)$  en coordenadas cartesianas;  $N$  el polo norte de la bola con las coordenadas  $(0, 0, 1)$  y  $\pi$  el plano ecuatorial (el plano  $xy$ ). Entonces tenemos la proyección estereografica  $\sigma : \Phi \rightarrow \pi$  con el centro  $N \in \Phi$ . Como vemos en el esquema, la aplicación reproduce el punto  $P \in \Phi$  en su imagen  $\sigma(P) \in \pi$ . Por eso:

$P = (x, y, z)^T \mapsto \sigma(P) = (x', y', 0)^T$ , donde  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  porque  $P \in \Phi$ . Para localizar las coordenadas  $x' = \xi$  y  $y' = \eta$  de  $\sigma(P)$  estudiamos la ecuación de la recta:

$$\begin{pmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \\ z - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - 1 \end{pmatrix}$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $N$  es el punto de apoyo de la recta. El vector de la dirección es  $\vec{NP}$ . Porque  $\sigma(P) = g(NP) \cap \pi$  su componente tercero debe ser cero.



Entonces,

$0 = 1 + \lambda(z - 1)$  y por eso  $\lambda = \frac{1}{1-z}$ . La división por  $1 - z$  no es un problema, porque  $z = 1$  no es posible ya que  $P \neq S$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Por las coordenadas de  $\sigma(P)$  tenemos  $\sigma(P) = (\xi, \eta)^T = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)^T$ . Entonces la definición de la proyección estereográfica:

$$\sigma : \Phi \rightarrow \pi \quad \sigma(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)^T$$

Por su inversa obtenemos con calculaciones fáciles:

$$\sigma^{-1} : \pi \rightarrow \Phi \quad \sigma^{-1}(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, 2y, x^2+y^2-1)$$

### Propiedades de la proyección estereográfica

- La primera propiedad de la proyección estereográfica  $\sigma$  es que la reproduce todos los puntos de la superficie de la bola excepto el centro de la proyección (N) en el plano  $\pi$  de la imagen. Podemos aumentar  $\sigma$  a una biyección, mientras extendemos el plano  $\pi$  con el punto impropio  $\infty$  a  $\hat{\pi}$  y adjudicamos:  
 $\sigma(N) = \infty$ .

- Además observamos que el ecuador es un círculo fijo con nuestra elección del centro y plano de la proyección. Como vemos en la primera figura, el hemisferio del norte va al interior del círculo y el hemisferio del sur va al exterior.

También vemos, que la proyección estereográfica no es fiel respecto de longitud y área. Particularmente los sectores cerca del centro de la proyección son reproducidos muy desfigurados en el plano de la imagen.

- Pero hay dos propiedades fascinantes:

La proyección estereográfica es no sólo fiel respecto a los ángulos sino también a los círculos. Vamos a demostrar esto después conocer algo de la historia de la proyección.

### La historia y algunos empleos

La aplicación de la proyección estereográfica es conocida hace más que 2000 años. El primero que la usaba, era Hipparch von Nicäa (sobre 190-125 a.C.), quien es más conocido para su idea genial de seccionar el globo en meridianos y paralelos. Aprovechó la aplicación solamente para la creación de mapas de las estrellas, que era el único empleo hasta el siglo 15. Cuando el descubrimiento de América 1492 ocasionó la subida de la demanda a mapas del globo cerca de la realidad en dos dimensiones, la proyección estereográfica estaba usando para crear mapas. Hasta hoy estos empleos son quedados: para la creación de mapas de estrellas, mapas de los polos y países con poca extensión, por ejemplo en Países Bajos la proyección estereográfica es la técnica preferencial. Además hay otros empleos: En la cristalografía se la usan para determinar la orientación de los planos de las barandillas de un cristal. Como dicho antes, en la Matemática un empleo importante es la identificación de la bola de Riemann con el plano gaussiana (de los números complejos).

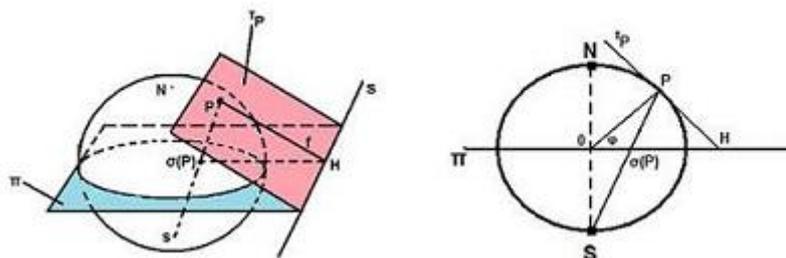
### Demostración de la fidelidad de los ángulos

Definimos que el ángulo de dos curvas que se interseccionan en la superficie de la bola es el ángulo de las tangentes asociadas en las curvas en el punto de intersección. La fidelidad de los ángulos dice que este ángulo está conservado por la proyección estereográfica. Para la demostración cogemos el polo sur como centro de la proyección.

**Demostración** Vamos a ver que la aplicación  $\sigma : \Phi \rightarrow \pi$  conserva los ángulos. Tenemos tres casos:

1.  $P \in \Phi$  con  $P \neq S$  y  $P \neq N$  donde N es el polo norte y S el polo sur de la bola
2.  $P = S$
3.  $P = N$

$P \in \Phi$  con  $P \neq S$  y  $P \neq N$ : Vemos, que la recta  $f$  que es contenida en el plano  $\tau_P$ , corta el plano  $\pi$  en el punto H con  $\overline{PH} = \overline{\sigma(P)H}$ , donde  $\tau_P$  es el plano tangencial de la bola en el punto P. La notación vemos en el esquema siguiente. Porque  $\Phi$  es la esfera con radio 1, podemos escribir las coordenadas de los puntos respecto el plano meridiano que contiene  $f$  así:



$$P = (x, y, z)^T = (\cos(\varphi), 0, \sin(\varphi))$$

$$\sigma(P) = \left(\frac{x}{z+1}, \frac{y}{z+1}\right)^T = \left(\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)+1}, 0\right)^T$$

$$H = \left(\frac{1}{\cos(\varphi)}, 0\right)^T$$

Observamos por la primera componente de  $H$  que  $\Delta HPO$  es un triángulo rectangular, donde  $\cos(\varphi) = \frac{OP}{HO} = \frac{1}{HO}$ .

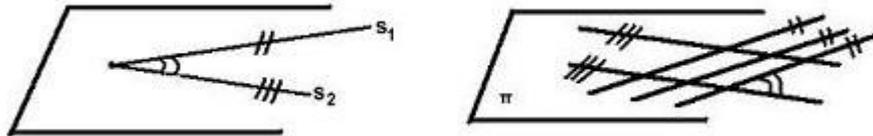
Por la distancia  $\overline{H\sigma(P)}$  resulta:

$$\begin{aligned} \overline{H\sigma(P)} &= \overline{HO} - \overline{O\sigma(P)} = \frac{1}{\cos(\varphi)} - \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)+1} = \frac{\sin(\varphi)+1-\cos^2(\varphi)}{\cos(\varphi)(\sin(\varphi)+1)} = \\ &= \frac{\sin(\varphi)+\sin^2(\varphi)}{\cos(\varphi)(\sin(\varphi)+1)} = \frac{\sin(\varphi)(1+\sin(\varphi))}{\cos(\varphi)(\sin(\varphi)+1)} = \tan(\varphi) \end{aligned}$$

No ocurre una división por cero, porque  $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  y entonces  $\cos(\varphi) > 0$ . Además vemos que  $\overline{HP} = \tan(\varphi)\overline{PO} = \tan(\varphi) * 1 = \tan(\varphi)$ . Entonces hemos probado que  $\overline{PH} = \overline{\sigma(P)H}$ . Consideramos otros puntos  $Q_i$  ( $i=1,2$ ) en la recta de intersección  $s$  con:  $s = \pi \cap \tau_P$ , entonces las tangentes  $Q_iP$  de la bola  $\Phi$ , cuyas ángulo es el ángulo de dos curvas en la superficie de la bola. Porque  $\overline{PH} = \overline{\sigma(P)H}$ ,  $\angle PHQ_i = \angle \sigma(P)HQ_i = 90^\circ$  y  $\overline{HQ_i} = \overline{HQ_i}$  los triángulos  $\Delta PHQ_i$  y  $\Delta \sigma(P)HQ_i$  son congruentes y  $\overline{Q_iP} = \overline{Q_i\sigma(P)}$ . Entonces  $\angle Q_1PQ_2 = \angle Q_1\sigma(P)Q_2$ . Así hemos visto que la proyección estereográfica conserva los ángulos de intersección.

$P = N$  Entonces  $\tau_N \parallel \pi$  y la proyección con centro  $S$  en el plano  $\pi$  es una proyección de un plano en un plano paralelo. Estas proyecciones conservan los ángulos.

$P = S$  Ahora  $\tau_S$  es un plano que está paralelo al plano de la imagen y  $S \in \tau_S$ . Dos rectas cualesquiera  $s_1, s_2 \in \tau_S$  determinan dos conjuntos de rectas paralelas, porque la dilatación de  $\pi$  a  $\hat{\pi}$ , que incluyen el mismo ángulo como  $s_1$  y  $s_2$ . Vemos en los dibujos siguientes. Entonces, hemos considerado todos los casos y hemos probado la fidelidad de los ángulos de la proyección estereográfica.



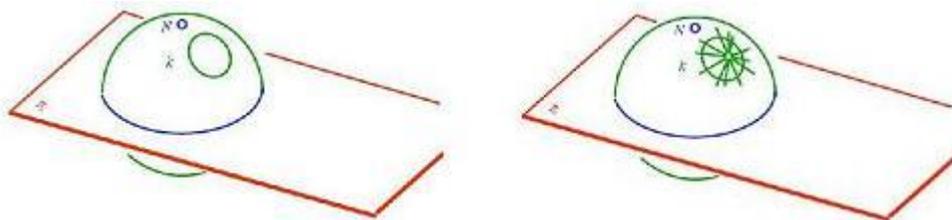
### Demostracion de la fidelidad de los circulos

Vamos a demostrar que la proyección estereografica  $\sigma$  aplica circulos en circulos. Ahora circulos incluyen los circulos de mobius, que pueden ser rectas.

**Demostración** Aquí también tenemos varias casos y cogemos el polo norte como centro de la proyección. Definimos gran circulos, que son circulos en la superficie de una bola con el radio máximo posible. Sus centros coinciden con el centro de la bola, entonces el centro de la bola está en el plano de un gran circulo. En contrario, circulos pequeños son circulos en la superficie de la bola cuyos planos no contienen el centro de la bola. Consideramos los tres casos:

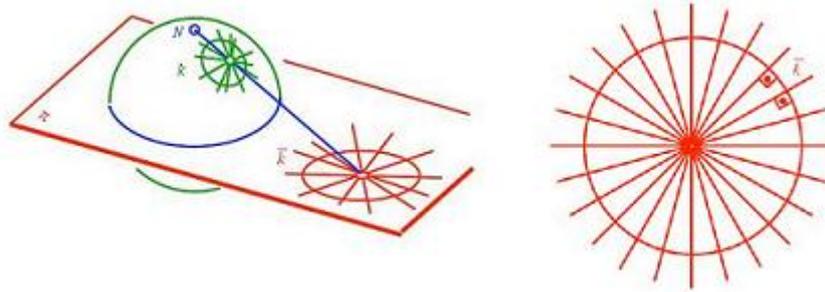
1. circulos pequeños que no contienen el centro de la proyección N
2. gran circulos
3. circulos pequeños que contienen el centro de la proyección N

Caso1: Consideramos un circulo pequeño k que no contiene el centro de la proyección como vemos en el esquema siguiente. Construimos la tangente en todos los puntos de k. Estas rectas forman la superficie de un cono y tienen una intersección S que es la vertice de este cono. El circulo es la intersección de este cono con la bola. La rectas son tangentes, entonces son ortogonal respecto de la superficie de la bola. Estas curvas imaginadas también estan ortogonal a k, ya que las tangentes respecto del circulo cortarían en un ángulo de  $90^\circ$ . La proyección de estas tangentes con centro N al plano



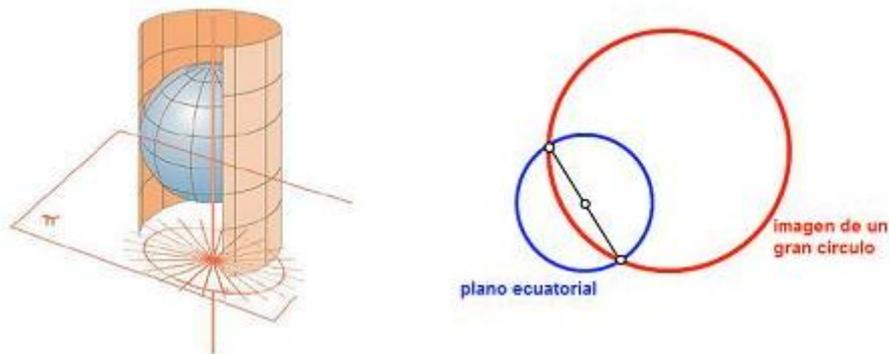
$\pi$  es un conjunto con un punto de intersección  $\bar{S}$  que es la imagen de S. Porque la proyección estereografica conserva los ángulos, todas las rectas de

ese conjunto tienen que cortar la imagen de  $k$ ,  $\bar{k}$ , en un ángulo de  $90^\circ$ , ya que estas rectas son las imágenes de las tangentes de las curvas que son ortogonales respecto de  $k$  en la superficie de la bola. Pero la única curva cerrada que



corta todas las rectas de un conjunto que intersecan en un único punto, es un círculo. Entonces  $\bar{k}$ , la imagen de nuestro círculo pequeño, también es un círculo.

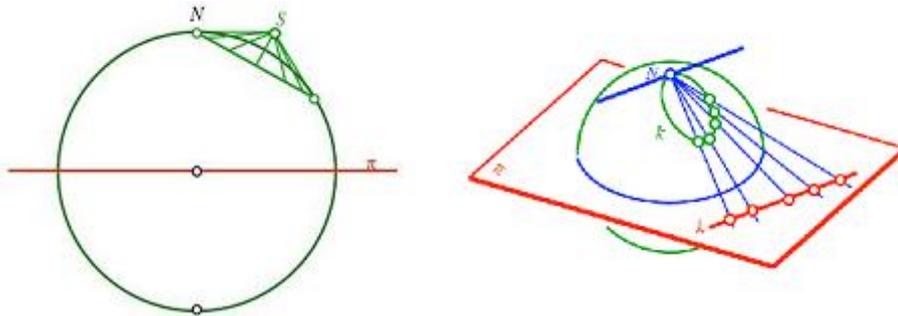
Caso2: Consideramos un gran círculo que no contiene  $N$ . Construimos las tangentes de la bola que son ortogonales respecto de  $k$ , vemos que estas forman un cilindro. Cuando proyectamos estas rectas en el plano  $\pi$  recibimos



un punto  $F$  que es el punto de intersección de las rectas por  $N$  que son paralelas respecto de las tangentes y el plano  $\pi$ . Como en el caso1 tenemos también un conjunto de rectas con un punto de intersección. Entonces la imagen del gran círculo que no contiene  $N$ , también es un círculo. Observamos que la imagen  $\bar{k}$  de  $k$  contiene los puntos de intersección de  $k$  con el círculo ecuatorial, porque el círculo ecuatorial es un círculo fijo respecto a la proyección.

Por un gran círculo que contiene  $N$ , el centro de la proyección, sabemos que la imagen contiene los dos puntos de intersección con el ecuador. Las imágenes de todos otros puntos de este círculo están en la recta que une estos dos puntos. Porque hemos dicho que rectas pertenecen en la grupo de círculos de mobius, un gran círculo que contiene  $N$ , también va a un círculo.

Caso3: Consideramos un círculo pequeño  $k$  que contiene  $N$ , el centro de la proyección. Como en el caso1 construimos las tangentes de la bola ortogonales a  $k$  que forman un cono. La tangente asociada a  $N$  es paralela respecto del plano  $\pi$ . Por eso la imagen de la vertice del cono  $S$ ,  $\bar{S}$ , está en el infinito. Entonces la imagen de  $S$  es el punto impropio  $\infty$ . Ya que las tangentes del cono están proyectadas en un conjunto de rectas paralelas y  $\bar{k}$  tiene que ser ortogonal a todas estas, por la fidelidad de los ángulos, recibimos una recta por  $\bar{k}$ . La imagen  $\bar{k}$  de un círculo  $k$  que contiene el centro de la proyección  $N$ , siempre es una recta. Otra posibilidad de ver esto: Los rayos de la proyec-



ción con centro  $N$  todos están en un plano. El plano que también contiene el círculo. La intersección de esto plano con el plano ecuatorial  $\pi$  es una recta  $\bar{k}$  que es la imagen de  $k$ . Esta recta  $\bar{k}$  es paralela respecto la tangente de  $k$  en  $N$ . Entonces vemos otra vez, que todas las imágenes de círculos que contienen el centro de la proyección son rectas (círculos de mobius). Ahora hemos demostrado todos los casos y por lo tanto la fidelidad de círculos de la proyección estereografica.

## Referencias

- Hoschek, Josef. Mathematische Grundlagen der Kartographie. Edición 2. 1984
- Schröder, Eberhard. Kartenentwürfe der Erde - Kartographische Abbildungsverfahren aus mathematischer und historischer Sicht. Leipzig: BSB B.G.Teubner Verlagsgesellschaft.1988.
- Stereografische Projektion Wikipedia. 12.01.09  
<[http://de.wikipedia.org/wiki/Stereografische\\_Projektion](http://de.wikipedia.org/wiki/Stereografische_Projektion)>
- imagines por la proyección estereografica. 10.01.09  
<[http://www.math.unibas.ch/~walser/institut/vorlesungen/09fs/ETH/Vorlesung/06\\_PPT\\_Stereogr\\_Projekt.ppt.pdf](http://www.math.unibas.ch/~walser/institut/vorlesungen/09fs/ETH/Vorlesung/06_PPT_Stereogr_Projekt.ppt.pdf)>