Seminario - Problema dos especies competidoras

El problema biológico

En la naturaleza hay muchas especies que viven en un ambiente común y necesitan la misma comida. Por ejemplo los leones, los buites y las hienas son competidores directos con respecto a la comida. Una cebra matada de un león en la sabana, será aprovechado de los buites y las hienas inmediamente despues del león desaparecio. En caso que dos competidores se encuentran un forcejeo está preprogramado. Así intentan de asegurar la presa y a veces no espantan la confrontación directo.

El problema en términos matemáticos

Consideramos ahora dos especies cuyas poblaciones son x(t) e y(t) en el tiempo t que compiten una con la otra por la comida disponsibles en el ambiente común. Para construir un modelo del problema en términos matemáticos tan realista como sea posible, notemos que tenemos 4 casos diferente que pueden ocurrir:

1. especie 1 sobrevive y especie 2 llega a extinguirse
2. especie 2 sobrevive y especie 1 llega a extinguirse
3. las dos especies coexisten
4. las dos especies llegan a extinguirse

Cada uno de estos resultados puede ser representado con un estado equilibrado de las poblaciónes x e y de las dos especies. Las ecuaciones diferenciales para modelar la alteración de x e y tienen que tener cuatro puntos críticos aislados.

Consideramos las ecuaciones de competencia:

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bx - \sigma y), \qquad \frac{dy}{dt} = y(c - \nu x - dy). \tag{1}$$

donde todos los coeficientes a,b,c,d,σ, ν son positivos.

Observemos que el crecimiento per cápita $(dx/dt)/x = (a - bx - \sigma y)$ consiste en tres expresiones: la tasa de crecimiento, a, de la población aislada; el competicion interno del especie, -bx; y el competicion con otra especie, $-\sigma y$. Lo mismo occure con las expresiones c, -dy y $-\nu x$ en $(dy/dt)/y$.

Como hemos dicho, el sistema tiene cuatro puntos críticos. Calculamos estos:

$$x(a - bx - \sigma y) = 0$$
$$y(c - \nu x - dy) = 0$$

vemos si $x = 0$ entonces $y = 0$ o $y = c/\nu$, mientas que si $y = 0$, entonces $x = 0$ o $x = a/b$. Estosson los tres puntos críticos $(0, 0), (0, c/d), (a/b, 0)$. El punto $(0, 0)$ representa el caso 4, las dos especies llegan a extinguirse. El punto $(0, c/d)$ representa el caso 2, la especie 2 sobrevive y la especie 1 llega a extinguirse. El punto$(a/b, 0)$ representa el caso 1 donde la especie 1 sobrevive y la especie 2 llega a extinguirse. El cuarto es la interseccion de las dos rectas

$$bx + \sigma y = a, \qquad \nu x + dy = c \tag{2}$$

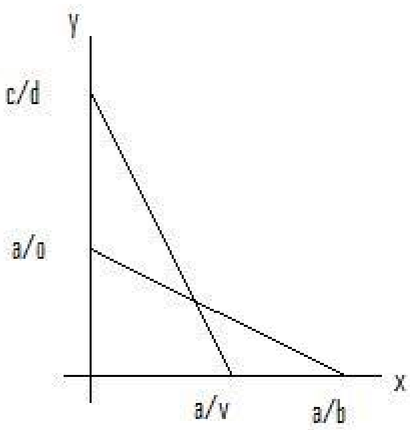
En nuestro modelo falta el caso 3 donde las dos especies sobreviven, por eso supongamos que esas dos rectas no son paralelas y que se intersectan en un punto del primer cuadrante. Entonces, la solucion del sistema $(\frac{ad-\sigma c}{bd-\nu c}, \frac{bc-a\nu}{bd-\nu\sigma})$ es el cuarto punto crítico y representa la posibilidad de coexistencia pacífica de las dos especies, con poblaciones estables

$$x(t) = \frac{ad - \sigma c}{bd - \nu c}, \qquad y(t) = \frac{bc - a\nu}{bd - \nu\sigma}$$

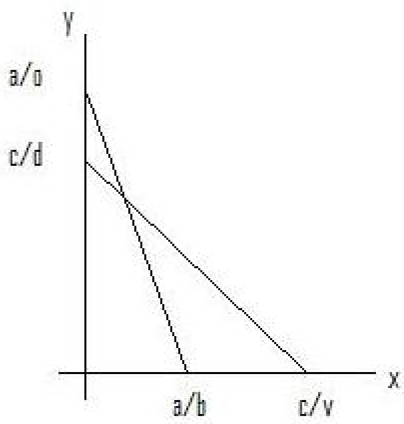
con
Caso 1: $bd < \nu\sigma$ $ad < \sigma c$ y $bc < a\nu$

Caso 2: $bd < \nu\sigma$ $ad < \sigma c$ y $bc < a\nu$.

Nos interesa la estabilidad del punto crítico $(\frac{ad-\sigma c}{bd-\nu c}, \frac{bc-a\nu}{bd-\nu\sigma})$. Esta vuelve a depender de la orientación relativa de las dos rectas de la expresión (2). Las dos posibilidades son:



caso 1



caso 2