Seminario - Problema dos especies competidoras

El problema biológico

En la naturaleza hay muchas especies que viven en un ambiente común y necesitan la misma comida. Por ejemplo los leones, los buites y las hienas son competidores directos con respecto a la comida. Una cebra matada de un león en la sabana, será aprovechado de los buites y las hienas inmediamente despues del león desaparecio. En caso que dos competidores se encuentran un forcejeo está preprogramado. Así intentan de asegurar la presa y a veces no espantan la confrontación directo.

El problema en términos matemáticos

Consideramos ahora dos especies cuyas poblaciones son x(t) e y(t) en el tiempo t que compiten una con la otra por la comida disponsibles en el ambiente común. Para construir un modelo del problema en términos matemáticos tan realista como sea posible, notemos que tenemos 4 casos diferente que pueden ocurrir:

1. especie 1 sobrevive y especie 2 llega a extinguirse
2. especie 2 sobrevive y especie 1 llega a extinguirse
3. las dos especies coexisten
4. las dos especies llegan a extinguirse

Cada uno de estos resultados puede ser representado con un estado equilibrado de las poblaciónes x e y de las dos especies. Las ecuaciones diferenciales para modelar la alteración de x e y tienen que tener cuatro puntos críticos aislados.

Consideramos las ecuaciones de competencia:

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bx - \sigma y), \qquad \frac{dy}{dt} = y(c - \nu x - dy). \tag{1}$$

donde todos los coeficientes a,b,c,d,σ, ν son positivos.

Puntos críticos y casos de la coexistencia de las 2 especies

Observemos que el crecimiento per cápita $(dx/dt)/x = (a - bx - \sigma y)$ consiste en tres expresiones: la tasa de crecimiento, a, de la población aislada; el competicion interno del especie, -bx; y el competicion con otra especie, $-\sigma y$. Lo mismo occure con las expresiones c, -dy y $-\nu x$ en $(dy/dt)/y$.

Como hemos dicho, el sistema tiene cuatro puntos críticos. Calculamos estos:

$$x(a - bx - \sigma y) = 0$$
$$y(c - \nu x - dy) = 0$$

vemos si $x = 0$ entonces $y = 0$ o $y = c/\nu$, mientas que si $y = 0$, entonces $x = 0$ o $x = a/b$. Estosson los tres puntos críticos $(0,0), (0, c/d), (a/b, 0)$. El punto $(0,0)$ representa el caso 4, las dos especies llegan a extinguirse. El punto $(0, c/d)$ representa el caso 2, la especie 2 sobrevive y la especie 1 llega a extinguirse. El punto$(a/b, 0)$ representa el caso 1 donde la especie 1 sobrevive y la especie 2 llega a extinguirse. El cuarto es la interseccion de las dos rectas

$$bx + \sigma y = a, \qquad \nu x + dy = c \tag{2}$$

En nuestro modelo falta el caso 3 donde las dos especies sobreviven, por eso supongamos que esas dos rectas no son paralelas y que se intersectan en un punto del primer cuadrante. Entonces, la solucion del sistema $(\frac{ad-\sigma c}{bd-\nu c}, \frac{bc-a\nu}{bd-\nu\sigma})$ es el cuarto punto crítico y representa la posibilidad de coexistencia pacífica de las dos especies, con poblaciones estables

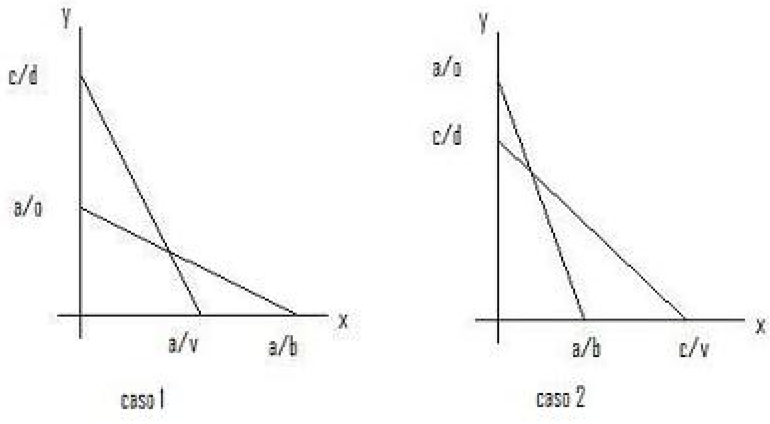
$$x(t) = \frac{ad - \sigma c}{bd - \nu c}, \qquad y(t) = \frac{bc - a\nu}{bd - \nu\sigma}$$

con

Caso 1: $bd < \nu\sigma \quad ad < \sigma c$ y $bc < a\nu$

Caso 2: $bd > \nu\sigma \quad ad > \sigma c$ y $bc > a\nu$.

Nos interesa la estabilidad del punto crítico $(\frac{ad-\sigma c}{bd-\nu c}, \frac{bc-a\nu}{bd-\nu\sigma})$. Esta vuelve a depender de la orientación relativa de las dos rectas de la expresión (2). Las dos posibilidades vemos en la figura siguiente.



Las condiciones de caso 1 y caso 2 tienen una interpretación natural. En las ecuaciones (1) vemos que b y d representan el efecto inhibitorio de cada población en su propio crecimiento. Por la otra parte, σ y ν representan el efecto de la competencia entre las dos poblaciones. Así que b d es una medida de la inhibición, mientras que σ ν es una mediada de la competencia. Un análisis general del sistema (1) muestra las siguientes conclusiones:

1. Si $\sigma\nu >$ bd, de modo que la competencia es grand comparade con la inhibición, entonces $(\frac{ad-\sigma c}{bd-\nu c}, \frac{bc-a\nu}{bd-\nu\sigma})$ es un puno crítico inestable y ya sea x(t) o y(t) tienden a cero cuando $t \to +\infty$. Así que las dos especies no pueden coexistir en este caso, una sobrevive y la otra llega a extinguirse localmente.

2. Si $\sigma\nu <$ bd la competencia es pequena comparada con la inhibición, y entonces $(\frac{ad-\sigma c}{bd-\nu c}, \frac{bc-a\nu}{bd-\nu\sigma})$ es un punto crítico asintóticamente estable al cual se aproxima cada solución cuando $t \to +\infty$. Entonces, ambas especies pueden coexistir en este caso, y lo hacen.

Vamos a examinar los puntos críticos más matemático. Tenemos puntos críticos aislados ya que tenemos sólo cuatro. Vamos a estudiar la estabilidad de los puntos críticos del sistema (1) con el método de linearización.

$$\frac{dx}{dt} = (a - bx - \sigma y)x =: f_1$$
$$\frac{dy}{dt} = (c - \nu x - dy)y =: f_2$$

Entonces la matriz jacobiana de f:

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y) = \begin{pmatrix} a - 2bx - \sigma y & -\sigma x \\ -\nu y & c - \nu x - 2dy \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos las matrices siguientes de las puntos críticos diferentes:

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(0,c/d) = \begin{pmatrix} a - \sigma c/d & 0 \\ \nu c/d & -c \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(a/b,0) = \begin{pmatrix} -a & \sigma a/b \\ 0 & c - \nu a/b \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(\frac{ad-\sigma c}{bd-\nu\sigma}, \frac{bc-a\nu}{bd-\nu\sigma}) = \frac{1}{bd-\nu\sigma}\begin{pmatrix} b(\sigma c - ad) & \sigma(\sigma c - ad) \\ \nu(a\nu - bc) & d(a\nu - bc) \end{pmatrix} \tag{6}$$

Los puntos críticos son aislados y su estabilidad es determinado de los valores propios de las matrices linealizados. Primero vamos a considerar la estabilidad en el CASO 1:

Recordamos que a,b,c,d,σ y ν son positivos. Entonces (3) nos dice que es $(0,0)$ es un NODO INESTABLE.
Los valores propios de (4) son:

$$((a-\sigma c/d)-\lambda)(-c-\lambda) = -c(a-\sigma c/d) + c\lambda - (a-\sigma c/d)\lambda + \lambda^2$$

Según CASO 1 $a - \sigma c/d < 0$. Entonces tenemos un polinomio estable y (0,c/d) es un punto crítico asintóticamente estable.
Los valores propios de (5) son:

$$(-a-\lambda)((c-\nu a/b)-\lambda) = -a(c-\nu c/b) + a\lambda - (c-\nu a/b)\lambda + \lambda^2$$

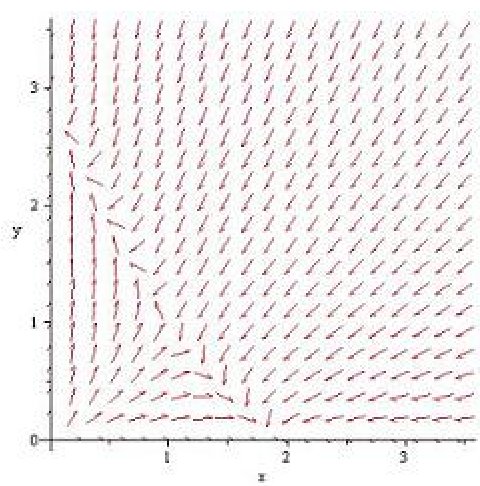
Según CASO 1 $c - \nu a/b < 0$. Entonces tenemos un polinomio estable y (a/b,0) es un punto crítico asintóticamente estable.
Para hacer una proposición de los valores propios de (6) calculamos su determinante:

$$\left(\frac{1}{bd-\nu\sigma}\right)^2 (bd(\sigma c - ad)(a\nu - bc) - \sigma\nu(\sigma c - ad)(a\nu - bc)) = \frac{(\sigma c - ad)(a\nu - bc)}{bd-\nu\sigma}$$

Con el CASO 1 sabemos que este determinante es negativo, porque $\sigma c - ad$ y $a\nu - bc$ son positivos y el denominador es negativo. Según una proposición de la Algebra Lineal que dice:

$$\det(A) = \lambda_1^{r_1} * \ldots * \lambda_m^{r_m}$$

con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz y λ_i sus valores propios con multiplicidad r_i.
Por eso y ya que (6) tiene dos valores propio al máximo, los valores propios tienen que tener signos distintos. Entonces $(\frac{ad-\sigma c}{bd-\nu\sigma}, \frac{bc-a\nu}{bd-\nu\sigma})$ es un SILLA DE MONTAR y por eso inestable.
Un campo de direcciones para este caso es: Con el sistema:



$$\frac{dx}{dt} = x(t)(2 - x(t) - y(t)), \qquad \frac{dy}{dt} = y(t)(3 - y(t) - 2x(t))$$

Ahora consideramos la estabilidad del CASO 2:
Aquí tenemos tambien que a,b,c,d,σ y ν son positivos. (3) tiene como en CASO1 dos valores propios positivos, por eso $(0,0)$ es punto crítico INESTABLE. Por (4) tenemos lo mismo polinomio pero ahora sabemos que $a - \sigma c/d > 0$. Entonces el polinomio no es estable. Calculamos los valores propios:

$$\lambda_{1/2} = \frac{(-c + a - \sigma c/d) \pm \sqrt{(c - a + \sigma c/d)^2 + 4c(a - \sigma c/d)}}{2}$$

Sabemos que $a - \sigma c/d > 0$, entonces $\sqrt{(c - a + \sigma c/d)^2 + 4c(a - \sigma c/d)}$ tiene un argumento positivo y es mayor que $-c + a - \sigma c/d$, entonces tenemos dos valores propios con signos diferentes. Por eso el punto (0,c/d) es INESTABLE.
Por (5) tenemos tambien lo mismo polinomio como CASO1 y sabemos que $c - \nu a/b > 0$. Entonces este polinomio no es estable tambien. Calculamos los calores propios:

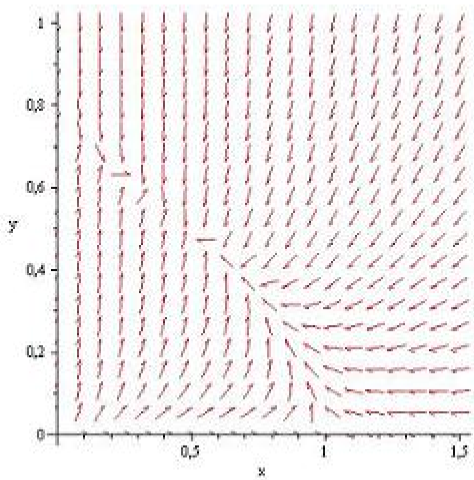
$$\lambda_{1/2} = \frac{(-a + c - \nu a/b) \pm \sqrt{(a - c + \nu a/b)^2 + 4a(c - \nu a/b)}}{2}$$

Sabemos que $c - \nu a/b > 0$, entonces $\sqrt{(a - c + \nu a/b)^2 + 4a(c - \nu a/b)}$ tiene un argumento positivo y es mayor que $-a + c - \nu a/b$, entonces tenemos dos valores probios con signos diferentes. Por eso el punto (a/b,0) es tambien INESTABLE.
Por (6) tenemos lo mismo determinante pero ahora $\sigma c - ad$ y $a\nu - bc$ son negativos, entoces el producto es positivo y el denominador es positivo tambien. Por eso sabemos que los valores propios tienen el mismo signo. Calculamos el polinomio caracteristico:

$$\begin{gathered}(b(\sigma c - ad) - \lambda)(d(a\nu - bc) - \lambda) - (\sigma(\sigma c - ad)\nu(a\nu - bc)) = \\ (bd - \sigma\nu)(\sigma c - ad)(a\nu - bc) - (b(\sigma c - ad) + d(a\nu - bc))\lambda + \lambda^2\end{gathered}$$

Sabemos que $\sigma c - ad$ y $a\nu - bc$ son negativos, entonces el producto $(bd - \sigma\nu)(\sigma c - ad)(a\nu - bc)$ es positivo. La suma $(\sigma c - ad) + d(a\nu - bc)$ es negativo, entonces el term linear tiene coeficiente positivo. Entonces tenemos un polinomio estable. Por eso los valores propios son negativos y $(\frac{ad-\sigma c}{bd-\nu\sigma}, \frac{bc-a\nu}{bd-\nu\sigma})$ es un punto crítico asintóticamente estable.
Un campo de direcciones de este caso es:

Con el sistema:



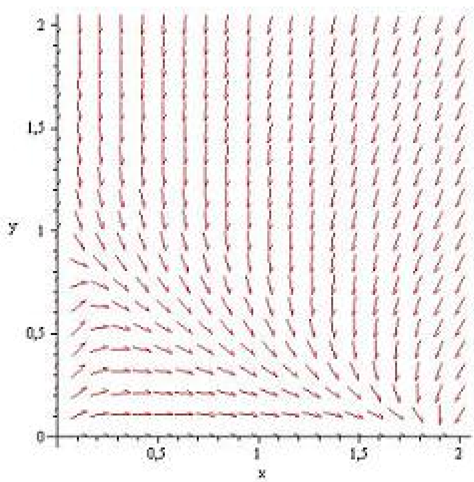
$$\frac{dx}{dt} = x(t)(1 - x(t) - y(t)), \qquad \frac{dy}{dt} = y(t)(3 - 4y(t) - 2x(t))$$

Casos sin coexistencia de las 2 especies

Ejemplo de un campo de direcciones por el caso donde la especie 1 sobrevive y la especie 2 llega a extinguirse:
Tenemos el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = x(t)(2 - x(t) - y(t)), \qquad \frac{dy}{dt} = y(t)(1 - y(t) - 2x(t))$$

Vemos que hay solamente tres puntos críticos. Entonces las rectas de (2)

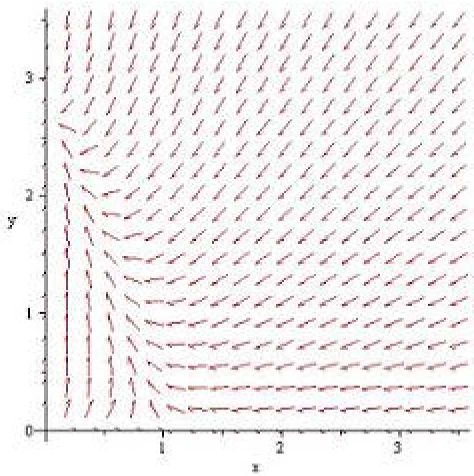


no se cortan en el premier cuadrante. El punto crítico $(0, 0)$ es inestable, el punto crítico $(0, 1)$ tambien. El punto crítico $(2, 0)$ es asintoticamente estable.Aquí vemos que la tasa de crecimiento de la especie 1 que es mayor que la de la especie 2 y el coeficiente de competicion con otra especie que es mayor en la especie 2 causar la extinción de la especie 2 y en mismo tiempo la supervivencia de la especie 1.

Otro ejemplo de un campo de direcciones por el caso donde la especie 2 sobrevive y la especie 2 llega a extinguirse:
Tenemos el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = x(t)(1 - x(t) - y(t)), \qquad \frac{dy}{dt} = y(t)(3 - y(t) - 2x(t))$$

Vemos que hay tamien solamente tres puntos críticos. Entonces las rectas de



(2) no se cortan en el premier cuadrante. El punto crítico $(0, 0)$ es inestable, es punto crítico $(1, 0)$ tambien y el punto crítico $(0, 3)$ es asintóticamente estable. Aquí vemos que ...